



Rapport PR301

Etude de la dynamique d'un système différentiel

Trinômes : Arnaud BRIGNOL
Chok Leong CHAI
Mohd Rushdan KHAIRUL ANUAR
Groupe : 4
Date : 30/01/2009
Responsable : Olivier de CAMBRY (Bureau 3305)

Dynamique des systèmes différentiels

Arnaud BRIGNOL, Chok Leong CHAI, Mohd Rushdan KHAIRUL ANUAR

19 janvier 2009

Table des matières

1	Introduction	1
2	Etablissement et résolution de l'équation différentielle	1
2.1	Etablissement d'une équation différentielle	1
2.2	Expression mathématique du nombre de points d'équilibre du système	2
2.3	Le cas pour $\mu = 0.1$	2
2.3.1	Les points d'équilibre du système	2
	La méthode graphique	2
	La méthode numérique	3
2.3.2	La nature des points d'équilibre	5
	(a) Pour $u^* = (0, 0)$	5
	(b) Pour $u^* = (2.85234, 0)$	5
	(c) Pour $u^* = (7.06817, 0)$	5
	(d) Pour $u^* = (8.42356, 0)$	5
	(e) Pour $u^* = (-2.85234, 0)$	5
	(f) Pour $u^* = (-7.06817, 0)$	5
	(g) Pour $u^* = (-8.42356, 0)$	6
2.3.3	Représentation de portrait de phase	6
2.3.4	Périodicité du mouvement	8
2.4	Conditions initiales $x(0) = x_0 > 0$ et $\dot{x}(0) = 0$	9
2.4.1	Calcul de la période	9
2.4.2	Représentation de la période T en fonction de x_0	9
2.5	Force de frottement	13
2.5.1	Détermination de la nature des points d'équilibre en fonction de α	13
	(a) Pour $u^* = (0, 0)$	14
	(b) Pour $u^* = (2.85234, 0)$	14
	(c) Pour $u^* = (7.06817, 0)$	14
	(d) Pour $u^* = (8.42356, 0)$	14
	(e) Pour $u^* = (-2.85234, 0)$	15
	(f) Pour $u^* = (-7.06817, 0)$	15
	(g) Pour $u^* = (-8.42356, 0)$	15
2.5.2	Nombre de passages par la position de repos	15
	Pour $x_0 = 10.6, \alpha = 1$	18
	Pour $x_0 = 6.6$ et $\alpha = 0.8$	18
	Pour $x_0 = 4$ et $\alpha = 0.5$	18
	Pour $x_0 = 4.9$ et $\alpha = 0.3$	19
3	Conclusion	20

1 Introduction

Le but de ce projet est l'étude du point de vue des équations différentielles du système mécanique suivant :

Une tige sans masse de longueur l , est fixée en O sur un axe. On note x l'angle formé par la tige et la verticale montante. Un ressort en spirale est fixé entre l'axe et la tige de telle façon qu'au repos ($x = 0$) la tige soit verticale, le vecteur \overrightarrow{OM} étant orienté vers le haut. Le ressort exerce sur la tige une force de rappel dont le moment est proportionnel à l'angle x de coefficient de raideur k . On suppose qu'au bout de la tige en M , on fixe une masse m .

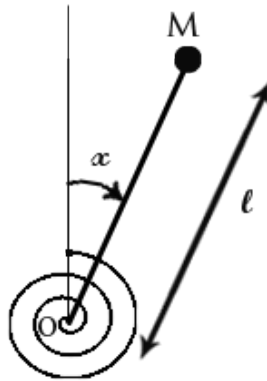


FIGURE 1 – Système mécanique à étudier

2 Etablissement et résolution de l'équation différentielle

2.1 Etablissement d'une équation différentielle

On note $\mu = \frac{k}{ml^2}$, $\gamma = \frac{g}{l}$. On veut montrer que x est solution d'une équation différentielle de la forme :

$$(E) \quad \ddot{x} = f(x, \mu, \gamma)$$

Solution :

On a trois forces, P le poids, R les frottements et F une certaine force de rappel exercée par le ressort. En appliquant le principe fondamental de la dynamique de rotation et en choisissant un sens de rotation approprié, on a :

$$M(P) + M(R) - M_c = J\ddot{x} \tag{1}$$

avec

$M(P)$ le moment d'inertie de la force P par rapport à l'axe	$M(P) = mgl \sin(x)$
$M(R)$ le moment d'inertie de la force R par rapport à l'axe	$M(R) = 0$
M_c le moment d'inertie de rappel	$M_c = kx$
J le moment du système par rapport à l'axe	$J = ml^2$

En remplaçant les termes correspondants (avec $M(R)$ supposé nul, sans frottements) dans l'équation (1), on obtient alors :

$$mgl \sin(x) + 0 - kx = ml^2\ddot{x}$$

$$\frac{g}{l} \sin(x) - \frac{k}{ml^2}x = \ddot{x}$$

En remplaçant dans cette dernière équation μ et γ , on obtient :

$$\gamma \sin(x) - \mu x = \ddot{x} \quad (2)$$

qui est l'équation demandée¹. On remarque que ce système décrit par l'équation 2 est un oscillateur non linéaire (voir le cours).

2.2 Expression mathématique du nombre de points d'équilibre du système

En supposant que $\gamma = 1$ pour la suite de ce projet, on veut déterminer l'expression mathématique du nombre de points d'équilibre du système en fonction de μ .

Solution :

En remplaçant $\gamma = 1$ dans l'équation (2), on a :

$$\sin(x) - \mu x = \ddot{x} \quad (3)$$

En posant $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$, on peut ramener l'équation (3) en une équation du premier ordre en dérivant u . Ce qui donne :

$$\dot{u} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ \sin(u_1) - \mu u_1 \end{bmatrix}$$

On veut déterminer les points d'équilibre du système ce qui revient à résoudre $\dot{u} = 0$ (le système ne bouge plus). On a donc :

$$\begin{cases} u_2 = 0 & (i) \\ \sin(u_1) - \mu u_1 = 0 & (ii) \end{cases}$$

La résolution de l'équation (i) est triviale. Pour l'équation (ii), on a deux possibilités :

$$\begin{cases} \sin(u_1) - \mu u_1 = 0 & \text{si } u_1 = 0 \\ \frac{\sin(u_1)}{u_1} = \mu & \text{si } u_1 = \text{sinc}^{-1}(\mu) \text{ pour } 0 \leq \mu \leq 1 \text{ (} \mu = \frac{k}{ml^2} \text{ est positif)} \end{cases}$$

Les points d'équilibre u^* sont donc $u^* = (0, 0)$ ou $(\text{sinc}^{-1}(\mu), 0)$. On obtient donc les solutions (points d'équilibre) en fonction de μ . Or, il n'existe pas une formule simple pour exprimer l'inverse de *sinc*, donc il faut résoudre cette équation numériquement ou même "graphiquement".

2.3 Le cas pour $\mu = 0.1$

2.3.1 Les points d'équilibre du système

Sachant que $\mu = 0.1$, on peut obtenir la valeur u_1 correspondante par la méthode "graphique" ou par la méthode numérique.

Solution :

La méthode graphique C'est la méthode la plus intuitive.

1. Cette équation est obtenue en posant des questions sur le forum [PhysicsForums.com](https://www.physicsforums.com)

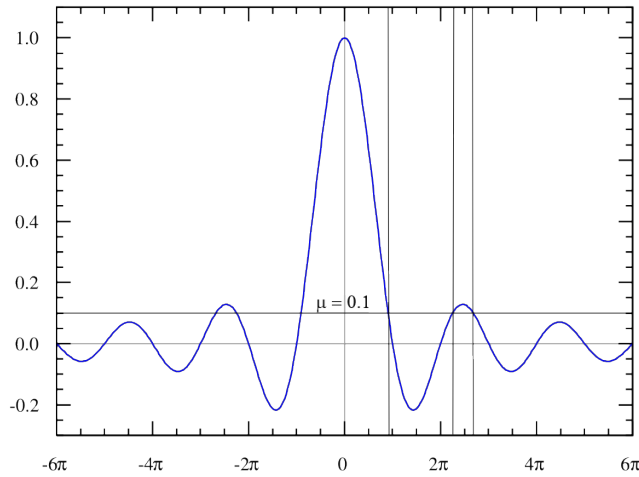


FIGURE 2 – Sinus cardinal

On voit sur la figure 2² qu'il existe 3 solutions pour la partie réelle positive (idem. pour la partie réelle négative). Si on prend une règle pour mesurer la distance des solutions et qu'on la convertit en radian selon le ratio par rapport à l'échelle sur l'axe horizontal, on obtient, pour la partie réelle positive :

$$\frac{\sin(u_1)}{u_1} = 0.1 \Rightarrow u_1 \simeq 2.8274 \text{ rad ou } 7.0686 \text{ rad ou } 8.3252 \text{ rad}$$

On vérifie les solutions :

$$\begin{aligned} \frac{\sin(2.8274)}{2.8274} &= 0.10930 \Rightarrow \text{Erreur} \simeq 9.30\% \\ \frac{\sin(7.0686)}{7.0686} &= 0.10004 \Rightarrow \text{Erreur} \simeq 0.04\% \\ \frac{\sin(8.3252)}{8.3252} &= 0.10703 \Rightarrow \text{Erreur} \simeq 7.03\% \end{aligned}$$

Or, on constate que cette méthode n'est pas très précise. L'erreur varie de 0 à 10%.

La méthode numérique Puisqu'on sait que le sinus cardinal est symétrique par rapport à l'axe vertical à l'origine et qu'il existe 3 solutions pour la partie réelle positive comprises entre $[0, 4\pi]$ d'après la méthode graphique, on se permet de limiter la recherche de solutions à cet intervalle. On écrit un programme sous Matlab pour calculer les solutions avec une erreur fixée à moins de 0.01%.

On a, à notre disposition, 3 méthodes de recherche numérique, apprises en I2 (MA213 Analyse Numérique). Ces méthodes sont la méthode de Descartes, la méthode de dichotomie et la méthode de Newton. Parmi ces trois méthodes, celle de Newton est la plus efficace. C'est pourquoi on choisit d'utiliser cette méthode³.

Voici le programme :

Le fichier f.m contient la fonction à étudier.

```
% f.m
% Fonction prédéfinie par l'utilisateur
function y = f(x);
y = sin(x)/x - 0.1; %Resultat en radian
```

Le fichier newton.m qui est le programme appliquant la méthode de Newton.

2. Cette image (sinus cardinal) est téléchargée du site Wikipédia.org

3. C'est possible aussi d'utiliser la fonction **fzero** vue dans le TD n°3 question 1.8 qui permet de trouver les mêmes solutions

```

% newton.m
% input a, M, delta ,erreur
a=2; % point de départ : 2 ou 7 ou 8
M=10; % nombre maximum d'iteration
delta=0.0001;
erreur=0.0001; % erreur de moins de 0.01%
v = f(a);
h = 0.00001; % valeur tres petite afin de calculer une derivee
if abs(v)<erreur
    break;
end
% La courbe y =f(x) =0 dérivable en a,
% la tangente a pour équation en b
% b = a - v / ( (f(a+h)-f(a)) / h)
for k = 1 :M
    b = a - v / ( (f(a+h)-f(a)) / h);
    % (f(a+h)-f(a))/h derivee de f(a)
    v = f(b);

    if abs(b-a)<delta || abs(v)<erreur
        break;
    % demander k afin d'obtenir le nombre d'iterations
    end
    a = b;
end
% Affichage des valeurs de f(a), f(b), a et b
% avec 6 chiffres apres la virgule
sprintf('Le resultat de f(a) vaut %f et a vaut %g', f(a),a)
sprintf('Le resultat de f(b) vaut %d et b vaut %g', v,b)
sprintf('k vaut %g', k)

```

Après avoir exécuté ce programme, on trouve les solutions pour $\frac{\sin(u_1)}{u_1} = 0.1$:

$$u_1 \simeq 2.85234 \text{ rad ou } 7.06817 \text{ rad ou } 8.42356 \text{ rad}$$

On vérifie ces solutions :

$$\frac{\sin(2.85234)}{2.85234} = 0.100000703 \Rightarrow \text{Erreur} = 7.03002 \times 10^{-4}\%$$

$$\frac{\sin(7.06817)}{7.06817} = 0.099999625 \Rightarrow \text{Erreur} = 3.745094 \times 10^{-4}\%$$

$$\frac{\sin(8.42356)}{8.42356} = 0.099972983 \Rightarrow \text{Erreur} = 2.701619 \times 10^{-2}\%$$

On voit que l'erreur est très faible, elle est de l'ordre de moins de 0.03%.

On a finalement, d'après ce qui précède, 7 points d'équilibre qui sont :

- (a) (0, 0)
- (b) (2.85234, 0)
- (c) (7.06817, 0)
- (d) (8.42356, 0)
- (e) (-2.85234, 0)
- (f) (-7.06817, 0)
- (g) (-8.42356, 0)

2.3.2 La nature des points d'équilibre

On veut connaître la nature des points d'équilibre trouvés précédemment.

Solution :

Pour connaître la nature de ces points d'équilibre, il faut connaître la matrice A telle que $\dot{u} = Au$. Elle est définie par :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{df_1(u_1, u_2)}{du_1} & \frac{df_1(u_1, u_2)}{du_2} \\ \frac{df_2(u_1, u_2)}{du_1} & \frac{df_2(u_1, u_2)}{du_2} \end{bmatrix}$$

Dans notre cas, on a :

$$\dot{u} = \begin{bmatrix} f_1(u_1, u_2) \\ f_2(u_1, u_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ \sin(u_1) - 0.1u_1 \end{bmatrix}$$

D'où :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \cos(u_1) - 0.1 & 0 \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est :

$$\varphi(\lambda) = \det(I\lambda - A) = \lambda^2 - \cos(u_1) + 0.1 \quad (4)$$

La nature des points d'équilibre se détermine à partir des valeurs propres.

(a) **Pour** $u^* = (0, 0)$ On a $\varphi_1(\lambda) = \lambda^2 - 0.9$ et $\Delta_1 = -4(-0.9) = 3.6$. Les racines sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{\sqrt{\Delta_1}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{-\sqrt{\Delta_1}}{2} \end{cases}$$

Puisque $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, $u^* = (0, 0)$ est un point selle (instable).

(b) **Pour** $u^* = (2.85234, 0)$ On a $\varphi_2(\lambda) = \lambda^2 + 1.0585$ et $\Delta_2 = -4(1.0585) = -4.234$. Les racines sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{i\sqrt{-\Delta_2}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{-i\sqrt{-\Delta_2}}{2} \end{cases}$$

Puisque λ_1 et λ_2 sont des imaginaires pures, $u^* = (2.85234, 0)$ est un centre des trajectoires périodiques.

(c) **Pour** $u^* = (7.06817, 0)$ On a $\varphi_3(\lambda) = \lambda^2 - 0.6074$ et $\Delta_3 = -4(-0.6074) = 2.4296$. Les racines sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{\sqrt{\Delta_3}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{-\sqrt{\Delta_3}}{2} \end{cases}$$

Puisque $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, $u^* = (7.06817, 0)$ est un point selle (instable).

(d) **Pour** $u^* = (8.42356, 0)$ On a $\varphi_4(\lambda) = \lambda^2 + 0.6393$ et $\Delta_4 = -4(0.6393) = -2.5572$. Les racines sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{i\sqrt{-\Delta_4}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{-i\sqrt{-\Delta_4}}{2} \end{cases}$$

Puisque λ_1 et λ_2 sont des imaginaires pures, $u^* = (8.42356, 0)$ est un centre des trajectoires périodiques.

(e) **Pour** $u^* = (-2.85234, 0)$ On a $\varphi_5(\lambda) = \lambda^2 + 1.0585 = \varphi_2(\lambda)$. Donc, $u^* = (-2.85234, 0)$ est un centre des trajectoires périodiques.

(f) **Pour** $u^* = (-7.06817, 0)$ On a $\varphi_6(\lambda) = \lambda^2 - 0.6074 = \varphi_3(\lambda)$. Donc, $u^* = (-7.06817, 0)$ est un point selle (instable).

(g) Pour $u^* = (-8.42356, 0)$ On a $\varphi_7(\lambda) = \lambda^2 + 0.6393 = \varphi_4(\lambda)$. Donc, $u^* = (-8.42356, 0)$ est un centre des trajectoires périodiques.

Point d'équilibre	Nature
(0, 0)	Point selle instable
(2.85234, 0)	Centre des trajectoires périodiques
(7.06817, 0)	Point selle instable
(8.42356, 0)	Centre des trajectoires périodiques
(-2.85234, 0)	Centre des trajectoires périodiques
(-7.06817, 0)	Point selle instable
(-8.42356, 0)	Centre des trajectoires périodiques

TABLE 1 – Table récapitulative de la nature des points d'équilibre

2.3.3 Représentation de portrait de phase

On veut représenter le portrait de phase.

Solution :

De l'équation 3, on a, pour $\mu = 0.1$:

$$\ddot{x} - \sin(x) + 0.1x = 0 \quad (5)$$

On multiplie l'équation 5 par \dot{x} :

$$\dot{x}\ddot{x} - \dot{x}\sin(x) + 0.1\dot{x}x = 0 \quad (6)$$

On intègre l'équation 6, et on obtient :

$$\int \dot{x}\ddot{x}dt - \int \dot{x}\sin(x)dt + 0.1 \int \dot{x}xdt = C \quad (7)$$

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \cos(x) + \frac{0.1}{2}x^2 = C \quad (8)$$

où C est la constante d'intégration. On a posé avant que $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$. Donc l'équation 8 s'écrit aussi :

$$\frac{1}{2}u_2^2 + \cos(u_1) + \frac{0.1}{2}u_1^2 = C \quad (9)$$

Le portrait de phase est obtenu en étudiant la famille de courbe Γ_c de l'équation 9 :

$$\Gamma_c = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \frac{1}{2}u_2^2 + \cos(u_1) + \frac{0.1}{2}u_1^2 = C\}$$

De l'équation 9, on obtient facilement que :

$$u_2 = \pm \sqrt{2C - 2\cos(u_1) - 0.1u_1^2} \quad (10)$$

A partir de l'équation 10, on peut tracer le portrait de phase (u_2 en fonction de u_1) à l'aide de Matlab. On écrit le programme suivant :

```
%portrait2.m
clear ;
hold off ;
u1=-4*pi :0.2 :4*pi ;
C=-1 :0.2 :9 ;
hold on ;
for i=1 :length(C)
    if (2*C(i)-2*cos(u1)-0.1*u1.*u1) >=0
```

```

plot(u1,sqrt(2*C(i)-2*cos(u1)-0.1*u1.*u1));
plot(u1,-sqrt(2*C(i)-2*cos(u1)-0.1*u1.*u1));
else
for j=1 :length(u1)
if (2*C(i)-2*cos(u1(j))-0.1*u1(j)*u1(j))>=0
y1(j)=sqrt(2*C(i)-2*cos(u1(j))-0.1*u1(j)*u1(j));
y2(j)=-sqrt(2*C(i)-2*cos(u1(j))-0.1*u1(j)*u1(j));
else % si imaginaire, u2=0
y1(j)=0;
y2(j)=0;
end
end
plot(u1,y1,'r');
plot(u1,y2,'r');
end
end
xlabel('u1');
ylabel('u2');
legend('Le portrait de phase');
figure(1);
axis('equal');
end
end

```

En exécutant ce programme, on obtient le portrait de phase comme dans la figure 3.

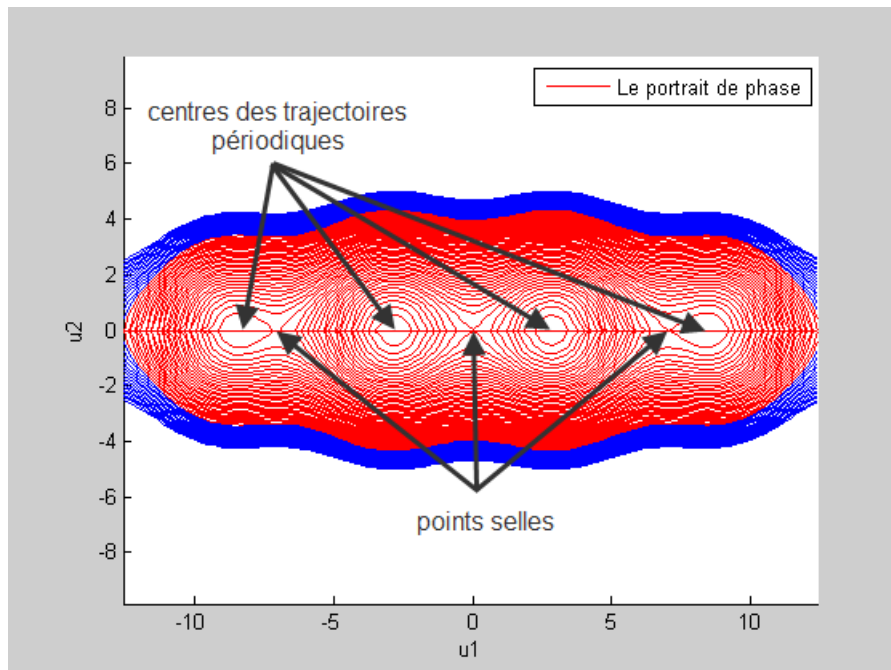


FIGURE 3 – Le portrait de phase

La figure 3 illustre le portrait de phase (en rouge) de notre système pour C comprise entre $[-1, 9]$. Pour $C > 9$, on a des courbes bleues fermées qui enveloppent les courbes en rouges.

2.3.4 Périodicité du mouvement

On veut montrer que le mouvement est périodique quelles que soient les conditions initiales.

Solution :

De l'équation 8, on peut poser que :

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + G(x) = C$$

Avec $G(x) = \cos(x) + \frac{0.1}{2}x^2$. On étudie cette fonction pour la détermination des trajectoires périodiques (d'après le cours) en la traçant à l'aide de Matlab sur l'intervalle $[-4\pi, 4\pi]$ car ce dernier contient tous les points d'équilibre du système d'après la section 2.3.1 (La méthode graphique). Voici le programme :

```
%periodicite.m
clear ;
hold off ;
hold on ;
figure(2) ;
x=-4*pi :0.1 :4*pi ;
plot(x,cos(x)+0.1/2*x.*x) ;
ylabel('G(x)') ;
xlabel('x en radian') ;
title('G(x) en fonction de x') ;
legend('G(x)=cos(x)+0.1/2*x^2') ;
axis('equal') ;
```

En lançant ce programme, on obtient la courbe comme dans la figure 4.

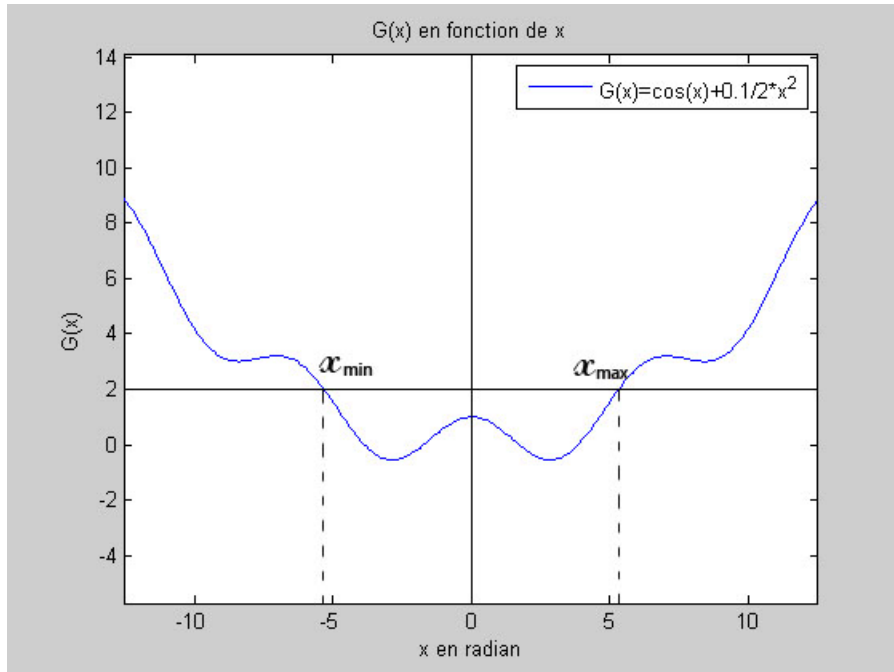


FIGURE 4 – Détermination des trajectoires périodiques

On voit sur la figure 4 que la courbe est symétrique par rapport à l'axe vertical à l'origine. Pour tout $x_{min} \in [-4\pi, 4\pi]$, on peut trouver un point $x_{max} \in [-4\pi, 4\pi]$ tel que $x_{min} < x_{max}$ et $G(x_{min}) = G(x_{max}) = a$ avec $a \in [-1, 8.9]$ (car $-1 = \inf G(x)$ et $8.8957 = \sup G(x)$ sur $[-4\pi, 4\pi]$) et la période $T = 2(t(x_{max}) - t(x_{min}))$.

Donc, le mouvement est périodique quelles que soient les conditions initiales $x(0) = x_0 \in [-4\pi, 4\pi]$. Cette est toujours valable pour $|x_0| > 4\pi$ d'après nos expériences sur Matlab.

D'ailleurs, on voit dans la figure 3 (Le portrait de phase) que les courbes sont bien fermées par rapport à l'axe horizontal.

2.4 Conditions initiales $x(0) = x_0 > 0$ et $\dot{x}(0) = 0$

On veut maintenant calculer et représenter la période T en fonction de x_0 pour $0 < x_0 < 4\pi$.

2.4.1 Calcul de la période

Solution :

De l'équation 10, en remplaçant u_1 et u_2 par x et \dot{x} respectivement, on a :

$$\dot{x} = \pm \sqrt{2C - 2 \cos(x) - 0.1x^2} \quad (11)$$

avec $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$. En appliquant la formule du cours, pour trouver la période $T = 2(t(x_{max}) - t(x_{min}))$, on a :

$$\int_{t(x_{min})}^{t(x_{max})} dt = \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{dx}{\sqrt{2C - 2 \cos(x) - 0.1x^2}} = t(x_{max}) - t(x_{min}) \quad (12)$$

en changeant les variables.

En remplaçant les conditions initiales ($x(0) = x_0 > 0$ et $\dot{x}(0) = 0$) dans l'équation 11, on trouve une condition pour la constant C qui est :

$$C = \cos(x_0) + \frac{0.1}{2}x_0^2$$

En prenant en compte cette dernière condition dans l'équation 12, on obtient :

$$T = 2 \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{dx}{\sqrt{2 \cos(x_0) + 0.1x_0^2 - 2 \cos(x) - 0.1x^2}} \quad (13)$$

$$T = 2 \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{dx}{\sqrt{2(\cos(x_0) - \cos(x)) + 0.1(x_0^2 - x^2)}} \quad (14)$$

x_{min} et x_{max} varient en fonction de x_0 choisi.

Il faut donc faire un programme sous Matlab pour calculer les valeurs x_{min} et x_{max} correspondantes de x_0 sur $]0, 4\pi[$ et les stocker dans une variable afin qu'on puisse calculer la période en intégrant l'équation 14.

2.4.2 Représentation de la période T en fonction de x_0

Solution :

On commence par écrire le programme correspondant. Après des heures d'essais, on constate qu'il est extrêmement difficile de faire un seul programme qui donne directement la période T en fonction de x_0 . Donc, on décide de diviser l'intervalle d'étude en 4 zones comme indiqué dans la figure 5.

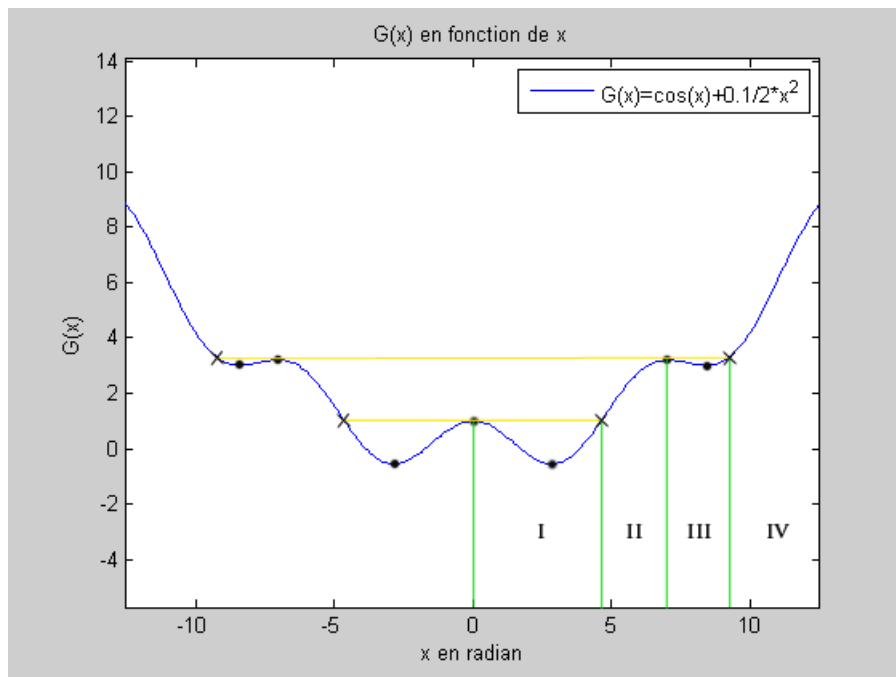


FIGURE 5 – 4 zones d'étude de la période

Quelques précisions sur la figure 5 :

- Les points noirs sont les points d'équilibre trouvés précédemment.
- Les croix sont les points limites où les trajectoires changent de zones.

On essaie maintenant de représenter la période T en fonction de ces 4 zones ou intervalles là. On commence par rechercher les points (ou croix dans la figure 5) dans la partie réelle positive en utilisant le programme de Newton écrit précédemment. On trouve les points suivants :

4.63716 rad

9.12089 rad

On peut donc en déduire l'intervalle pour chacune de ces 4 zones.

- Zone I $\subseteq]0 \text{ rad}, 4.63716 \text{ rad} [$
- Zone II $\subseteq]4.63716 \text{ rad}, 7.06817 \text{ rad} [$
- Zone III $\subseteq]7.06817 \text{ rad}, 9.12089 \text{ rad} [$
- Zone IV $\subseteq]9.12089 \text{ rad}, 4\pi[$

On se permet maintenant de faire le programme qui affiche la période T en fonction de x_0 . On commence par modifier le programme Newton afin qu'il soit mieux adapté à notre situation.

Voici la listing de tous les fichiers nécessaires :

Le fichier f.m

```
% f.m
% Fonction prédéfinie par l'utilisateur
function y = f(x,x0);
y=cos(x)+0.1/2*x*x-(cos(x0)+0.1/2*(x0)^2);
```

Le fichier newton.m modifié

```
% newton.m
% input a, x_min, M, delta ,erreur
% a=input;
% x_0=input;
M=10; % nombre maximum d'iteration
```

```

delta=0.0001;
erreur=0.0001; % erreur de moins de 0.01%
v = f(a,x_0);
h = 0.00001; % valeur tres petite afin de calculer une derivee
if abs(v)<erreur
    break;
end
for k = 1 :M
    b = a - v / ( ( f(a+h,x_0)-f(a,x_0)) / h );
    v = f(b,x_0);
    if abs(b-a)<delta || abs(v)<erreur
        break; % demander k afin d'obtenir le nombre d'iterations
    end
    a = b;
end
% b=output

```

Le fichier p.m contient l'équation à intégrer

```

%p.m
function y=p(xzero,x);
y=2./sqrt(2*cos(xzero)+0.1*xzero*xzero-2*cos(x)-0.1*x.*x);

```

Le fichier principal period.m

```

% period.m
clear;
hold off;
% définition des zones
x_zone_i=0 :0.01 :4.63716;
x_zone_ii=4.63716 :0.01 :7.06817;
x_zone_iii=7.06817 :0.01 :9.12089;
x_zone_iv=9.12089 :0.01 :4*pi;
%valeur pour newton.m
a=4.5;%d'après la courbe G(x)
%calcul de xmin et xmax pour zone i
for i=1 :length(x_zone_i)
    % test si on arrive au minima
    if(x_zone_i(i)<=2.85234)
        x_0=x_zone_i(i);%point départ newton;
        x_min_max_zone_i(i,1)=x_0;
        x_min_max_zone_i(i,2)=b;
    else
        a=1.5;
        x_0=x_zone_i(i);%point départ newton;
        x_min_max_zone_i(i,1)=b;
        x_min_max_zone_i(i,2)=x_0;
    end
end
end
%calcul de période pour zone i
for j=1 :length(x_zone_i)

```

```

x_0=x_zone_i(j) ;
Tii(j)=quad(@(x)p(x_0,x),x_min_max_zone_i(j,1),x_min_max_zone_i(j,2)) ;

end
%calcul de période pour zone ii
for l=1 :length(x_zone_ii)
    x_0=x_zone_ii(l) ;
    Tii(l)=quad(@(x)p(x_0,x),-x_0,x_0) ;

end
%valeur pour newton.m
a=8.9 ;%d'après la courbe G(x)
%calcul de xmin et xmax pour zone iii
for i=1 :length(x_zone_iii)
    % test si on arrive au minima
    if(x_zone_iii(i)<=8.42356)
        x_0=x_zone_iii(i) ;%point départ newton ;
        x_min_max_zone_iii(i,1)=x_0 ;
        x_min_max_zone_iii(i,2)=b ;
    else
        a=7.5 ;
        x_0=x_zone_iii(i) ;%point départ newton ;
        x_min_max_zone_iii(i,1)=b ;
        x_min_max_zone_iii(i,2)=x_0 ;
    end

end
%calcul de période pour zone iii
for j=1 :length(x_zone_iii)
    x_0=x_zone_iii(j) ;
    Tiii(j)=quad(@(x)p(x_0,x),x_min_max_zone_iii(j,1),x_min_max_zone_iii(j,2)) ;

end
%calcul de période pour zone iv
for l=1 :length(x_zone_iv)
    x_0=x_zone_iv(l) ;
    Tiv(l)=quad(@(x)p(x_0,x),-x_0,x_0) ;

end
hold on ;
plot(x_zone_i,Ti,'r.') ;
plot(x_zone_ii,Tii,'r.') ;
plot(x_zone_iii,Tiii,'r.') ;
plot(x_zone_iv,Tiv,'r.') ;
xlabel('x0') ;
ylabel('Période (T)') ;
title('La période T en fonction de x0') ;
axis([0 4*pi 0 50]) ;

```

Après avoir exécuté le programme, on obtient à la sortie du programme un graphe illustré par la figure 6.

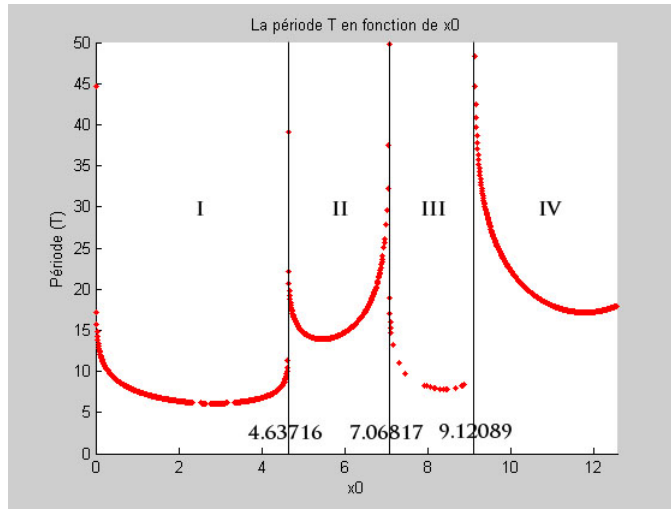


FIGURE 6 – La période T en fonction de x_0

On voit que, d'après la figure 6, la période varie de 0 à 50 secondes (sauf au point $x_0 = 9.12089$ qui tend vers l'infini).

2.5 Force de frottement

On suppose maintenant que le système est soumis à une force de frottement opposée à la vitesse de coefficient $\alpha > 0$. En ajoutant ce nouveau terme de frottement dans l'équation différentielle 2, on obtient :

$$\gamma \sin(x) - \mu x - \alpha \dot{x} = \ddot{x} \quad (15)$$

En posant toujours que $\gamma = 1$ et $\mu = 0.1$, on a finalement :

$$\sin(x) - 0.1x - \alpha \dot{x} = \ddot{x} \quad (16)$$

2.5.1 Détermination de la nature des points d'équilibre en fonction de α

On veut déterminer la nature des points d'équilibre en fonction de α .

Solution :

On pose toujours $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{u} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ \sin(u_1) - 0.1u_1 - \alpha u_2 \end{bmatrix}$. Les points d'équilibre sont déterminés avec $\dot{u} = 0$ tel que le système ne bouge plus. On a alors :

$$\begin{cases} u_2 = 0 & (i) \\ \sin(u_1) - 0.1u_1 = 0 & (ii) \end{cases}$$

Or, on s'aperçoit que l'équation (ii) ci-dessus est la même équation que celle étudiée précédemment (paragraphe 2.2). Donc, on a toujours les mêmes points d'équilibre qui sont :

- (a) $(0, 0)$
- (b) $(2.85234, 0)$
- (c) $(7.06817, 0)$
- (d) $(8.42356, 0)$
- (e) $(-2.85234, 0)$
- (f) $(-7.06817, 0)$
- (g) $(-8.42356, 0)$

Maintenant, on veut étudier la nature de ces points d'équilibre. Le système linéaire associé est $\dot{u} = Au$ telle que A est définie comme suivant :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{df_1(u_1, u_2)}{du_1} & \frac{df_1(u_1, u_2)}{du_2} \\ \frac{df_2(u_1, u_2)}{du_1} & \frac{df_2(u_1, u_2)}{du_2} \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, on a :

$$\dot{u} = \begin{bmatrix} f_1(u_1, u_2) \\ f_2(u_1, u_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ \sin(u_1) - 0.1u_1 - \alpha u_2 \end{bmatrix}$$

D'où :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \cos(u_1) - 0.1 & -\alpha \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est :

$$\varphi(\lambda) = \det(I\lambda - A) = \lambda^2 + \alpha\lambda + 0.1 - \cos(u_1) \quad (17)$$

La nature des points d'équilibre se détermine à partir des valeurs propres.

(a) Pour $u^* = (0, 0)$ On a $\varphi_1(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda - 0.9$ et $\Delta_1 = \alpha^2 - 4(-0.9) = \alpha^2 + 3.6 > \alpha^2 > 0$. Les racines sont réelles :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{-\alpha + \sqrt{\Delta_1}}{2} > 0 \\ \lambda_2 = \frac{-\alpha - \sqrt{\Delta_1}}{2} < 0 \end{cases}$$

Puisque $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ pour $\alpha > 0$, $u^* = (0, 0)$ est un point selle.

(b) Pour $u^* = (2.85234, 0)$ On a $\varphi_2(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda + 1.0585$ et $\Delta_2 = \alpha^2 - 4(1.0585) = \alpha^2 - 4.234$. Les valeurs des racines dépendent de α .

(i) $\alpha \geq \sqrt{4.234}$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{-\alpha + \sqrt{\Delta_2}}{2} < 0 \\ \lambda_2 = \frac{-\alpha - \sqrt{\Delta_2}}{2} < 0 \end{cases}$$

On a $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, donc un noeud stable.

(ii) $0 < \alpha < \sqrt{4.234}$ Dans ce cas, on a des racines complexe conjuguées avec des parties réelles négatives. Donc c'est une spirale stable.

(c) Pour $u^* = (7.06817, 0)$ On a $\varphi_3(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda - 0.6074$ et $\Delta_3 = \alpha^2 - 4(-0.6074) = \alpha^2 + 2.4296 > \alpha^2 > 0$. Les racines sont réelles :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{-\alpha + \sqrt{\Delta_3}}{2} > 0 \\ \lambda_2 = \frac{-\alpha - \sqrt{\Delta_3}}{2} < 0 \end{cases}$$

Puisque $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ pour $\alpha > 0$, $u^* = (7.06817, 0)$ est un point selle.

(d) Pour $u^* = (8.42356, 0)$ On a $\varphi_4(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda + 0.6393$ et $\Delta_4 = \alpha^2 - 4(0.6393) = \alpha^2 - 2.5572$. Les valeurs des racines dépendent de α .

(i) $\alpha \geq \sqrt{2.5572}$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{-\alpha + \sqrt{\Delta_4}}{2} < 0 \\ \lambda_2 = \frac{-\alpha - \sqrt{\Delta_4}}{2} < 0 \end{cases}$$

On a $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, donc on a un noeud stable.

(ii) $0 < \alpha < \sqrt{2.5572}$ Dans ce cas, on a des racines complexe conjuguées avec des parties réelles négatives. Donc c'est une spirale stable.

(e) **Pour** $u^* = (-2.85234, 0)$ On a $\varphi_5(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda + 1.0585 = \varphi_2(\lambda)$ et $\Delta_5 = \alpha^2 - 4(1.0585) = \alpha^2 - 4.234$. Les valeurs des racines dépendent de α .

(i) $\alpha \geq \sqrt{4.234}$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{-\alpha + \sqrt{\Delta_5}}{2} < 0 \\ \lambda_2 = \frac{-\alpha - \sqrt{\Delta_5}}{2} < 0 \end{cases}$$

On a $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, donc un noeud stable.

(ii) $0 < \alpha < \sqrt{4.234}$ Dans ce cas, on a des racines complexe conjuguées avec des parties réelles négatives. Donc c'est une spirale stable.

(f) **Pour** $u^* = (-7.06817, 0)$ On a $\varphi_6(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda - 0.6074 = \varphi_3(\lambda)$. Donc, pour $\alpha > 0$, $u^* = (-7.06817, 0)$ est un point selle.

(g) **Pour** $u^* = (-8.42356, 0)$ On a $\varphi_7(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda + 0.6393 = \varphi_4(\lambda)$ et $\Delta_7 = \alpha^2 - 4(0.6393) = \alpha^2 - 2.5572$. Les valeurs des racines dépendent de α .

(i) $\alpha \geq \sqrt{2.5572}$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{-\alpha + \sqrt{\Delta_7}}{2} < 0 \\ \lambda_2 = \frac{-\alpha - \sqrt{\Delta_7}}{2} < 0 \end{cases}$$

On a $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, donc un noeud stable.

(ii) $0 < \alpha < \sqrt{2.5572}$ Dans ce cas, on a des racines complexe conjuguées avec des parties réelles négatives. Donc c'est une spirale stable.

Point d'équilibre	Nature
(0, 0)	Point selle si $\alpha > 0$
(2.85234, 0)	$\begin{cases} \text{Noeud stable} & \text{si } \alpha \geq \sqrt{4.234} \\ \text{Spirale stable} & \text{si } 0 < \alpha < \sqrt{4.234} \end{cases}$
(7.06817, 0)	Point selle si $\alpha > 0$
(8.42356, 0)	$\begin{cases} \text{Noeud stable} & \text{si } \alpha \geq \sqrt{2.5572} \\ \text{Spirale stable} & \text{si } 0 < \alpha < \sqrt{2.5572} \end{cases}$
(-2.85234, 0)	$\begin{cases} \text{Noeud stable} & \text{si } \alpha \geq \sqrt{4.234} \\ \text{Spirale stable} & \text{si } 0 < \alpha < \sqrt{4.234} \end{cases}$
(-7.06817, 0)	Point selle si $\alpha > 0$
(-8.42356, 0)	$\begin{cases} \text{Noeud stable} & \text{si } \alpha \geq \sqrt{2.5572} \\ \text{Spirale stable} & \text{si } 0 < \alpha < \sqrt{2.5572} \end{cases}$

TABLE 2 – Table récapitulative de la nature des points d'équilibre

2.5.2 Nombre de passages par la position de repos

On suppose que $x(0) = x_0 > 0$ et $\dot{x}(0) = 0$. Maintenant, on veut déterminer le nombre de passages par la position de repos effectués avant que le système s'arrête en fonction de x_0 et α .

Solution :

On a déterminé avant que $\dot{u} = \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ \sin(u_1) - 0.1u_1 - \alpha u_2 \end{bmatrix}$ avec $u = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$. En prenant en compte les conditions initiales posées au début de ce paragraphe, on a le système différentiel du premier ordre suivant :

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_2 \\ \dot{u}_2 = \sin(u_1) - 0.1u_1 - \alpha u_2 \\ \text{Conditions initiales :} \\ u_1(0) = x(0) = x_0 > 0 \\ u_2(0) = \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système différentiel \dot{u} nous permet de connaître la position de x en fonction du temps de notre propre système. Si on donne un temps suffisamment grand (200 secondes par exemple) pour l'étude de la position de notre système, on peut atteindre la position finale, c'est-à-dire, la position de repos de notre système. A partir de cette dernière, on peut enfin déduire le nombre de passages effectués avant que notre système s'arrête.

On utilise la fonction `ode45` fournie par Matlab pour résoudre ce système différentiel \dot{u} du premier ordre. Puis, avec la solution obtenue en fonction de x_0 et de α , on calcule le nombre de passages par la position de repos effectués avant de s'arrêter en implémentant l'algorithme suivant : Dès que la tige passe par la position de repos, on incrémente le nombre de passages de 1.

Voici la totalité du programme :

```
% passage.m
function passage
clear ;
alpha_=0.1 :0.1 :3;%facteur d'amortissement
x0=0.1 :0.1 :12;%position initiale
np=0;%nombre de passages
for i=1 :length(x0)
    u0(1)=x0(i) ;
    u0(2)=0 ;
    for j=1 :length(alpha_)
        [t,u]=ode45(@system,[0 :0.1 :200],u0,[],alpha_(j)) ;
        xf=u(length(t),1);%position de repos
        %calcul de nombre de passages par xf
        np=0 ;
        %algo : dépasse position repos
        old_plusmoins=0 ;
        for k=1 :length(t)
            if abs(u(k,1)-xf)>0.001
                if u(k,1)>xf
                    plusmoins=1;%au dessus de xf
                else
                    if u(k,1)<xf
                        plusmoins=2;%en dessous de xf
                    else
                        plusmoins=0 ;
                    end
                end
            end
            if old_plusmoins~=plusmoins
                if(k~=1)
```

```

        np=np+1 ;
    end
    old_plusmoins=plusmoins ;
end
end
M(j,i)=np ;
end
end
mesh(x0,alpha_,M)
function dudt=system(t,u,a)
dudt=[u(2) ; sin(u(1))-0.1*u(1)-a*u(2)] ;

```

Ce programme prend environ 5 minutes pour s'exécuter. La figure 7 montre la sortie du programme.

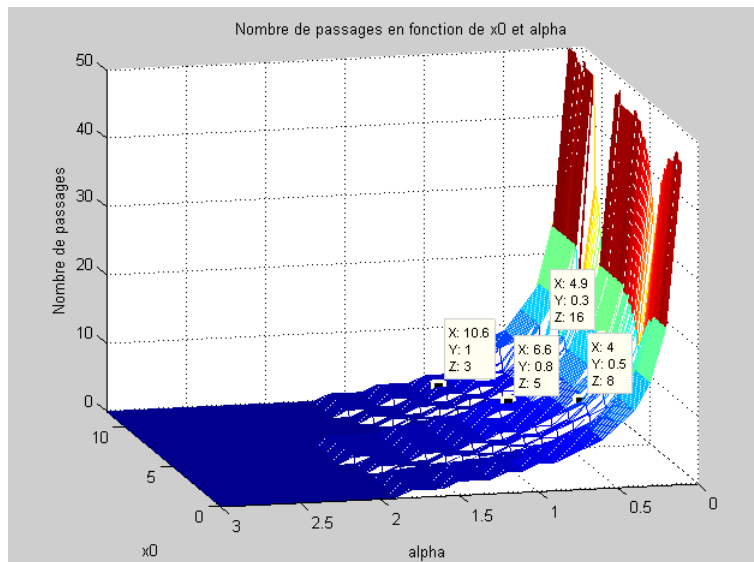


FIGURE 7 – Nombre de passages en fonction de x_0 et α

On voit sur la figure 7 que le système ne bouge pratiquement plus pour $\alpha > 2$ (plus précisément $\alpha \geq \sqrt{4.234}$ d'après le calcul dans 5.2.1). On constate que le nombre de passages pourrait augmenter encore si on augmente le temps d'observation pour α autour de 0.

On repère quelques points sur la figure 7 pour vérifier les solutions obtenues avec le programme suivant :

```

%verifie_passage.m
function verifie_passage
x0=10.6 ;
a=1 ;
u0(1)=x0 ;
u0(2)=0 ;
[t,u]=ode45(@system,[0 :0.01 :200],u0,[],a) ;
xf=u(length(t),1) ;%position de repos

plot(t,u( :,1)) ;
ylabel('x') ;
xlabel('t') ;
title(['x en fonction de t pour x0=' num2str(x0) ' et alpha=' num2str(a)] ) ;
function dudt=system(t,u,a)
dudt=[u(2) ; sin(u(1))-0.1*u(1)-a*u(2)] ;

```

Pour $x_0 = 10.6$, $\alpha = 1$ Voir la figure 8. On devrait avoir 3 passages par la position de repos.

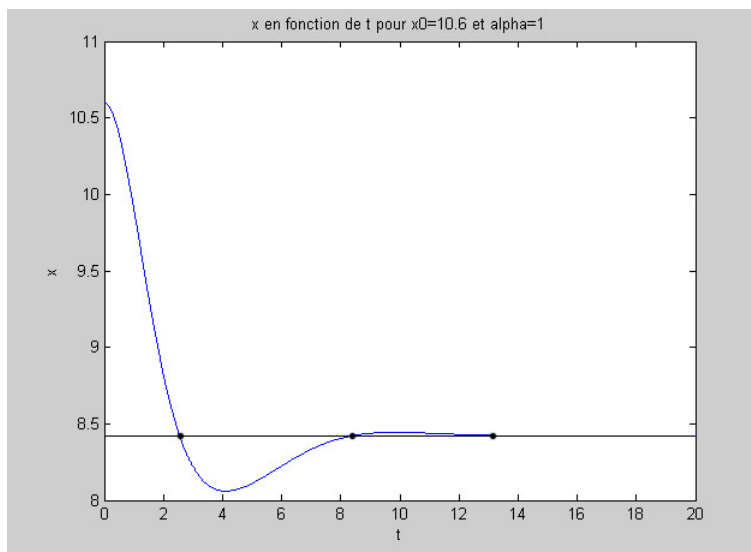


FIGURE 8 – x en fonction de temps

D'après la figure 8, on a 3 passages par la position de repos.

Pour $x_0 = 6.6$ et $\alpha = 0.8$ Voir la figure 9. On devrait avoir 5 passages par la position de repos.

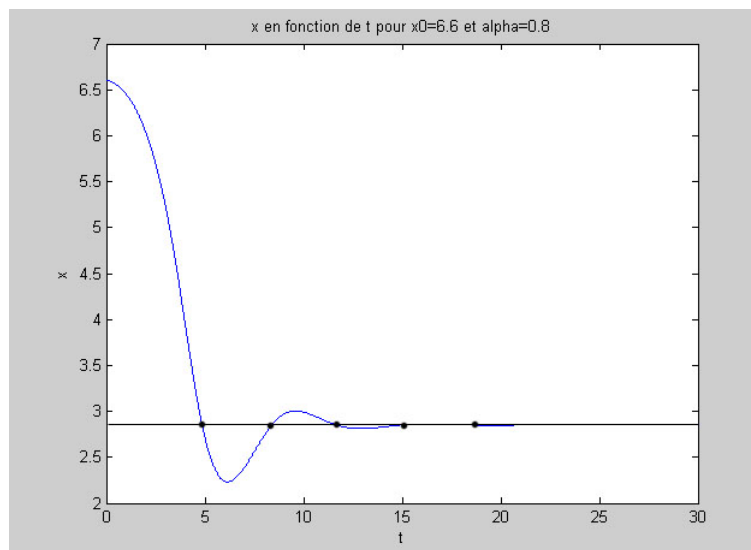


FIGURE 9 – x en fonction de temps

D'après la figure 9, on a 5 passages par la position de repos.

Pour $x_0 = 4$ et $\alpha = 0.5$ Voir la figure 10. On devrait avoir 8 passages par la position de repos.

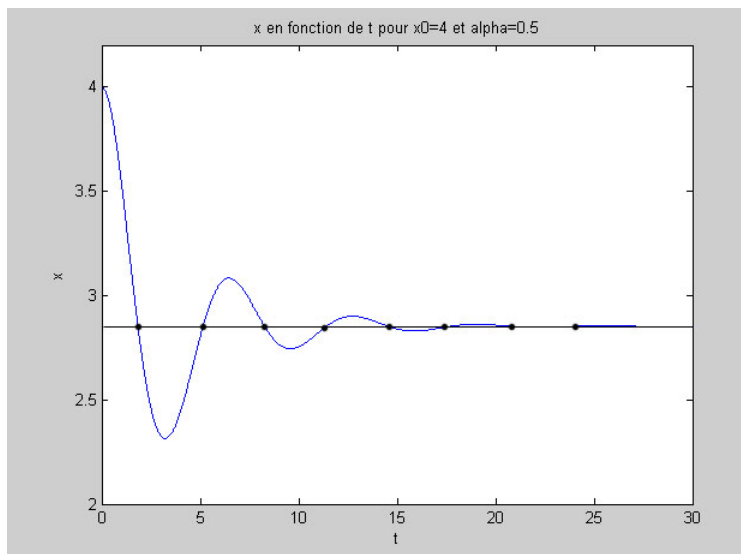


FIGURE 10 – x en fonction de temps

D'après la figure 10, on a 8 passages par la position de repos.

Pour $x_0 = 4.9$ et $\alpha = 0.3$ Voir la figure 11. On devrait avoir 16 passages par la position de repos.

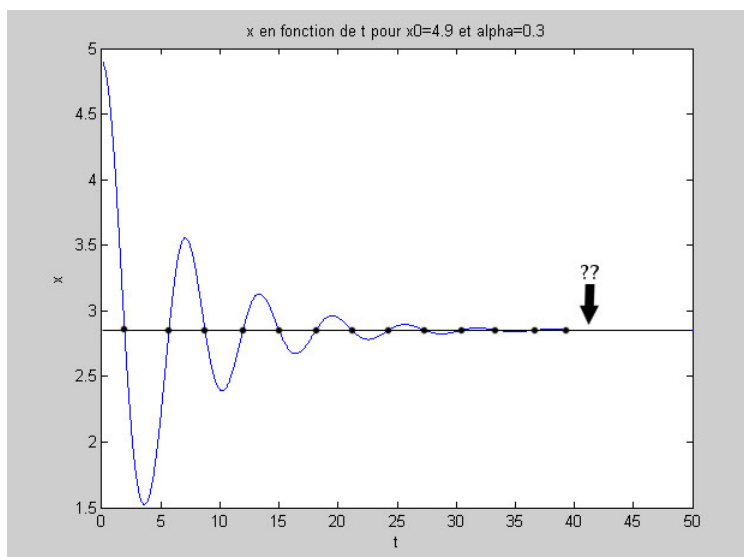


FIGURE 11 – x en fonction de temps

D'après la figure 11, on ne voit que 13 points. Or, il y a certainement des passages par la position de repos qu'on ne peut pas voir sur la figure 11 car ce sont de très petites variations.

Conclusion :

On peut donc conclure que la représentation de nombre de passages par la position de repos dans la figure 7 est une bonne approximation de nombre de passages réels.

3 Conclusion

Ce projet de mathématiques appliquées a été très enrichissant autant du point de vue scientifique que sur le plan humain. Il nous a donné d'une part l'occasion de mettre en pratique ce que l'on nous a enseigné sur l'étude des systèmes dynamiques en établissant des équations différentielles. Et nous a permis d'autre part d'apprendre à organiser et gérer l'avancement d'un projet en groupe.

Les connaissances acquises tout au long de la réalisation de ce projet pourront nous être utiles dans notre future travail lorsque nous serons amenés à devoir mettre au point des systèmes dynamiques.